PART2　関数の極大・極小

例題

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y = x^3 - 3x + 1$

(2)　$y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 7$

(3)　$y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

Point Pickup

練習

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$

(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

第15講　PART2 確認問題

1　関数 $y=-2x^3+9x^2-27$ の極値とグラフを考える。

$y'=0$ となる x の値は，［ア］

これより，極値を求めると

極大値は［イ］，極小値は［ウ］

この関数のグラフは［エ］である。

[［ア］の選択肢]

① $x=0,\ 3$　② $x=-3,\ 0$　③ $x=-3$ のただ1つ

④ $x=0$ のただ1つ　⑤ $x=3$ のただ1つ　⑥ ない

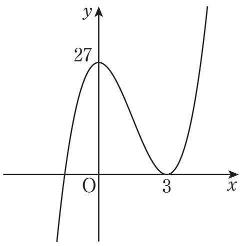
[［イ］，［ウ］の選択肢]

① -27　② 0

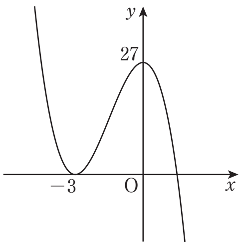
③ 27　④ ない

[［エ］の選択肢]

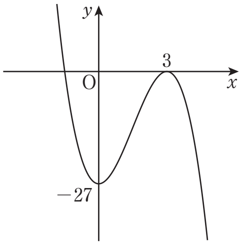
①



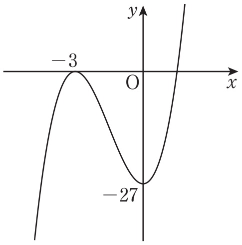
②



③



④



2 関数 $y=x^3-3x^2+3x$ の極値とグラフを考える。

$y'=0$ となる x の値は，**オ**

これより，極値を考えると，**カ**

この関数のグラフは **キ** である。

[**オ** の選択肢]

①　$x=1,\ -1$　　②　$x=1$ のただ1つ

③　$x=-1$ のただ1つ　　④　ない

[**カ** の選択肢]

①　極値をもたない

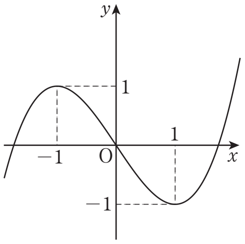
②　極大値は1，極小値は -1

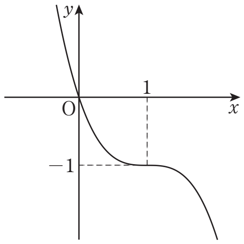
③　極大値は1，極小値はない

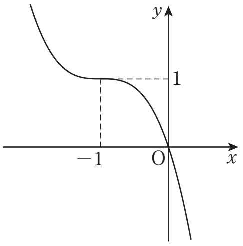
④　極大値はない，極小値は -1

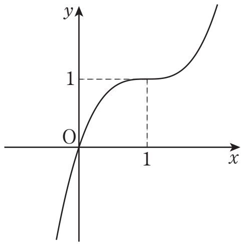
⑤　極大値は1，極小値は0

[**キ** の選択肢]

①


②


③


④


3 関数 $y=-x^3-4x+2$ の極値とグラフを考える。

$y'=0$ となる x の値は，［ク］

これより，極値を考えると，［ケ］

この関数のグラフは［コ］である。

［［ク］の選択肢］

① $x=0$　② $x=2$

③ $x=-2$　④ ない

［［ケ］の選択肢］

① 極値をもたない

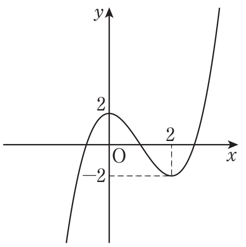
② 極大値は 2，極小値は -2

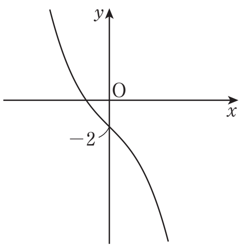
③ 極大値は 2，極小値はない

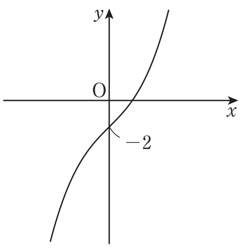
④ 極大値はない，極小値は -2

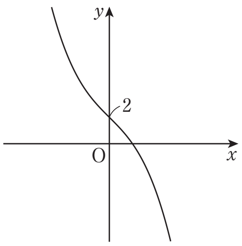
⑤ 極大値は 2，極小値は 0

［［コ］の選択肢］

①


②


③


④


PART2　関数の極大・極小

例題

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x+1$　　(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

(1)　$y=x^3-3x+1$ より　$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

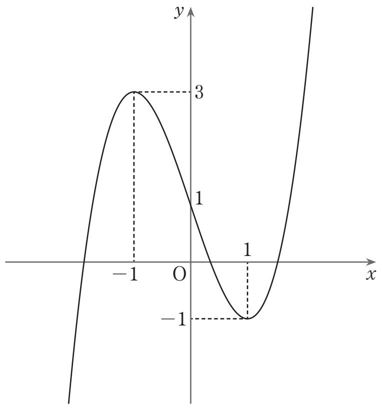
よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗

したがって

$x=-1$ で極大値 3，$x=1$ で極小値 -1

をとる。グラフは右図。



(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$ より　$y'=-3x^2+12x-12=-3(x^2-4x+4)=-3(x-2)^2$

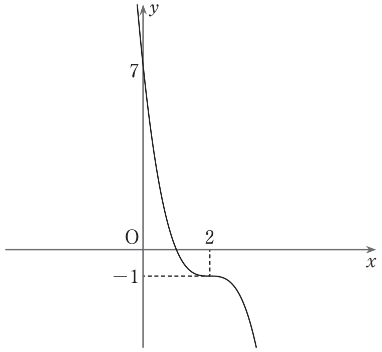
$y'=0$ とすると　$x=2$

よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	-1	↘

したがって，y は常に減少し，極値をもたない。

グラフは右図。



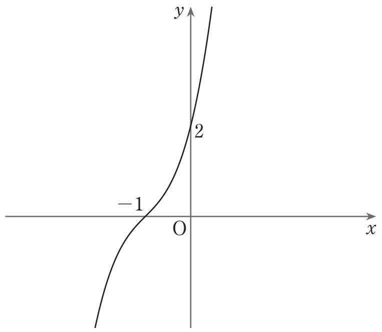
(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$ より

$$y'=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0$$

よって，常に $y'>0$ より，y は常に増加し，

極値をもたない。

グラフは右図。



練習

次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$ より　$y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1$

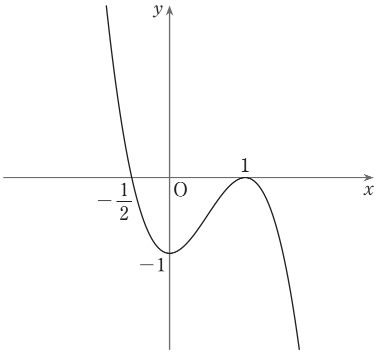
よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-1	↗	0	↘

したがって

$x=1$ で極大値 0，$x=0$ で極小値 -1

をとる。グラフは右図。



(2)　$y=x^3+3x^2+3x$ より　$y'=3x^2+6x+3=3\left(x^2+2x+1\right)=3(x+1)^2$

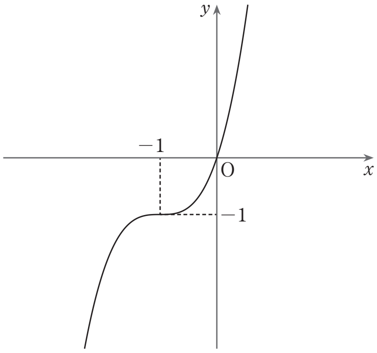
$y'=0$ とすると　$x=-1$

よって，y の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	-1	↗

したがって，y は常に増加し，極値をもたない。

グラフは右図。

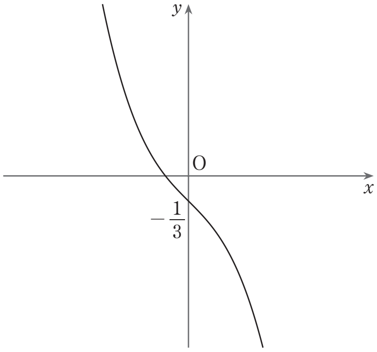


(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$ より　$y'=-3x^2-1<0$

よって，常に $y'<0$ より，y は常に減少し，

極値をもたない。

グラフは右図。



第15講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：②，ウ：①，エ：③

[解説]

$y=-2x^3+9x^2-27$ より

$y'=-6x^2+18x=-6x(x-3)$ [A]

$y'=0$ とすると　$\boldsymbol{x=0,\ 3}$　[A]

よって，y の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-27	↗	0	↘

[A]

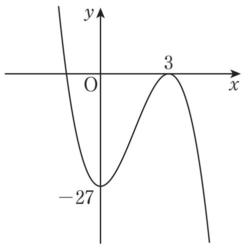
したがって

$x=3$ で**極大値 0** [B]

$x=0$ で**極小値 -27**

をとる。

グラフは下図のようになる。　[A]



[A]　関数 $f(x)$ のグラフのかき方
① 導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。
③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。
④ 増減表をもとにグラフをかく。

[B]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値
$f'(x)$ の符号に変化がない
$\Longrightarrow$ $f(a)$は極値をとらない

2 [正解] オ：②，カ：①，キ：④

[解説]

$y=x^3-3x^2+3x$ より

$$y'=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)$$
$$=3(x-1)^2$$ [C]

$y'=0$ とすると　$\boldsymbol{x=1}$　[C]

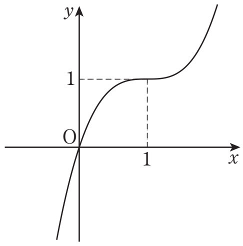
よって，y の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	1	↗

[C]

したがって，常に $y'\geqq 0$ より，y は常に増加し，**極値をもたない。** [D]

グラフは下図のようになる。　[C]



[C]　関数 $f(x)$ のグラフのかき方
① 導関数 $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。
③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。
④ 増減表をもとにグラフをかく。

[D]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値
$f'(x)$ の符号に変化がない
$\Longrightarrow$ $f(a)$は極値をとらない

3 **[正解]** **ク：④，ケ：①，コ：④**

[解説]

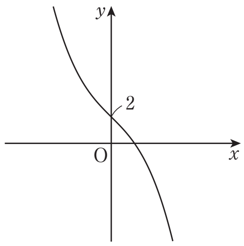
$y=-x^3-4x+2$ より

$$y'=-3x^2-4<0$$

となり **$y'=0$ となる x の値はない。**

よって，常に $y'<0$ より，y は常に減少し，**極値をもたない。** [E]

グラフは下図のようになる。



[E]　関数の極値
関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ の符号に変化がなければ，$f(x)$ は極値をもたない。